Тренировочная работа № 1
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 1

Район ______________________________

Город (населенный пункт) ______________________________

Школа ______________________________

Класс ______________________________

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Отчество ______________________________

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

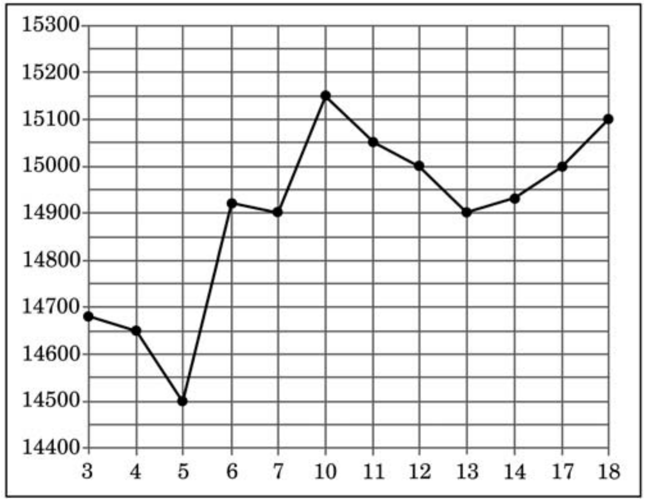
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 В обменном пункте одна украинская гривна стоит 3 рубля 80 копеек. Отдыхающий Н. обменял рубли на гривны и купил арбуз весом 7 кг по цене 2 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась ему эта покупка?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку цену олова на момент закрытия торгов 7 сентября (в долларах США за тонну).

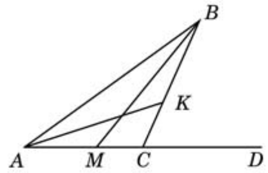


Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+1} = 8$.

Ответ:

В4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BM. Известно, что угол ABM равен 15°, а угол KAM равен 18°. Найти внешний угол BCD при вершине C.



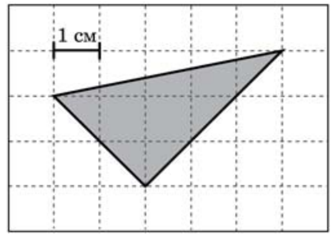
Ответ:

В5 Для изготовления книжных полок требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,35 $м^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 $м^2$)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	380	75
Б	410	65
В	420	55

Ответ:

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см ×1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

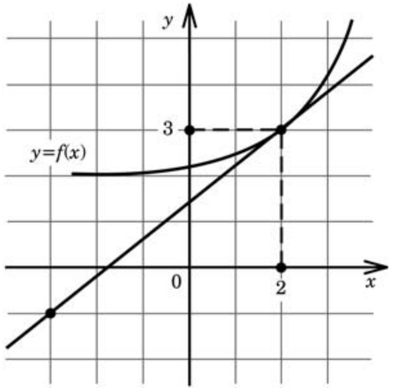


Ответ:

В7 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.



Ответ:

B9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 2. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 4 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

Ответ:

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 80 - 10p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 150 тыс. руб.

Ответ:

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 7x^2 + 16x - 9$ на отрезке $\left[-1; \frac{8}{3}\right]$.

Ответ:

B12 Смешали 3 литра 10-процентного водного раствора некоторого вещества с 7 литрами 20-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

C3 Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2} + \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-3)^2} \le \frac{(2x^2 - x + 5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Тренировочная работа № 1
по МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант № 2

Район ______________________________

Город (населенный пункт) ______________________________

Школа ______________________________

Класс ______________________________

Фамилия ______________________________

Имя ______________________________

Отчество ______________________________

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

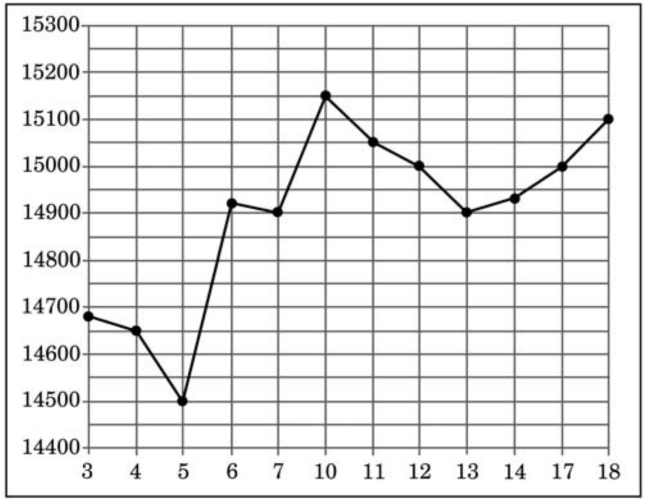
Часть 1

Ответом на задания В1 – В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

В1 В обменном пункте одна украинская гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающий Н. обменял рубли на гривны и купил арбуз весом 8 кг по цене 2 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась ему эта покупка?

Ответ:

В2 На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку цену олова на момент закрытия торгов 12 сентября (в долларах США за тонну).

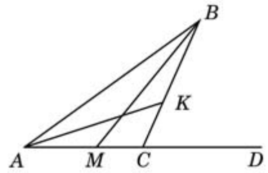


Ответ:

В3 Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+4} = 7$.

Ответ:

В4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BM. Известно, что угол ABM равен $13°$, а угол KAM равен $19°$. Найти внешний угол BCD при вершине C.



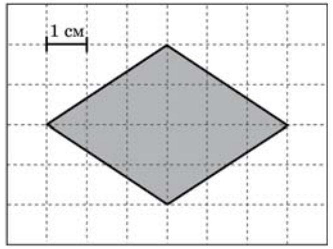
Ответ:

В5 Для изготовления книжных полок требуется заказать 25 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,3 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	370	95
Б	380	85
В	390	75

Ответ:

В6 На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен ромб (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

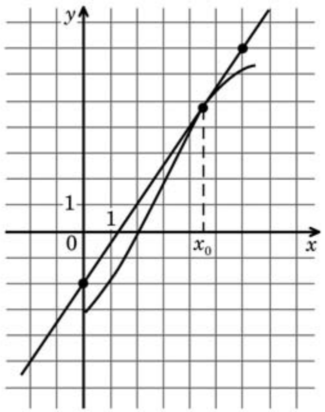


Ответ:

В7 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{109}}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Ответ:

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

B9 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 5. Каждое ребро этого параллелепипеда увеличили в 2 раза. Найдите объем получившегося параллелепипеда.

Ответ:

B10 Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 110 - 10p$. Определите максимальное значение цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 280 тыс. руб.

Ответ:

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = -x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ на отрезке $[-1; 3]$.

Ответ:

B12 Смешали 2 литра 10-процентного водного раствора некоторого вещества с 8 литрами 15-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 – C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - 2\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 10$, $BC = 12$, $CC_1 = 6,5$, найдите угол между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

C3 Решите неравенство

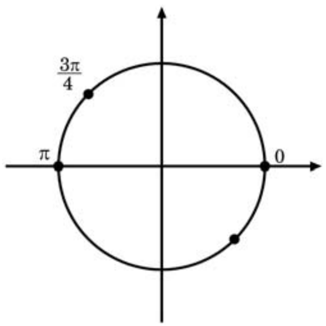
$$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x+1)^2} + \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-1)^2} \le \frac{(2x^2 + x + 5)^2}{2(x^2 - 1)^2}.$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0.$

Решение.



Перейдем к системе $\begin{cases} \sin 2x + 2\sin^2 x = 0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$

Решим уравнение: $2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x(\cos x + \sin x) = 0$. Значит, $\sin x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -1$.

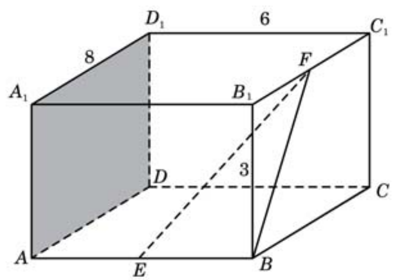
Учитывая, что $\cos x < 0$, находим: $x = \pi + 2\pi k$ или $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Ответ: $\pi + 2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\ k \in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но отбор корней не произведен или произведен неверно.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Решение.



Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани BCC_1B_1, которая параллельна плоскости ADD_1.

Точка B – проекция точки E на эту плоскость.

Искомый угол равен углу $\angle EFB$.

$BE = \dfrac{6}{2} = 3$,

$B_1F = \dfrac{8}{2} = 4,\ FB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

$\operatorname{tg} \angle EFB = \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{3}{5}.$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2} + \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-3)^2} \le \frac{(2x^2 - x + 5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение.

Сделаем замену: $a = \dfrac{x-1}{x+2},\ b = \dfrac{x+1}{x-3}$.

Тогда $a + b = \dfrac{(x-1)(x-3) + (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{2x^2 - x + 5}{(x+2)(x-3)}$.

Неравенство принимает вид: $a^2 + b^2 \le \dfrac{(a+b)^2}{2}$,

откуда $a^2 + b^2 - 2ab \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$.

Это неравенство вычисляется тогда и только тогда, когда $a = b$.

Получаем: $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x+1}{x-3}$, откуда $x = \dfrac{1}{7}$.

Замечание. Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к неравенству $\dfrac{(7x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)^2} \le 0$, откуда также получается ответ $x = \dfrac{1}{7}$.

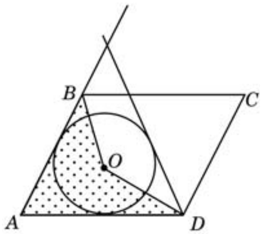
Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в результате ошибочных рассуждений приобретены лишние решения, либо на последнем этапе решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

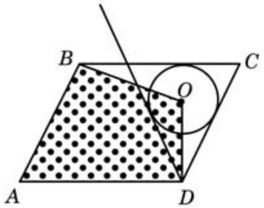
Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 2 соответственно.



Для треугольника со стороной 5 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{12}.$$



Для треугольника со стороной 2 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{23\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{3}}{12}$, $\dfrac{23\sqrt{3}}{6}$.

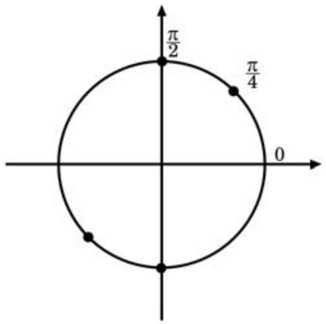
Содержание критерия	Балл
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - 2\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

Решение.

Перейдем к системе $\begin{cases} \sin 2x - 2\cos^2 x = 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$



Решим уравнение: $2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$,

откуда $\cos x(\sin x - \cos x) = 0$. Значит, $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 1$.

Учитывая, что $\sin x > 0$, находим: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

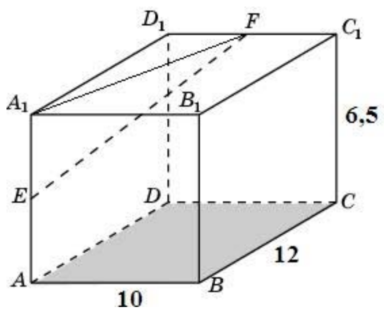
Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\ k \in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но отбор корней не произведен или произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 10$, $BC = 12$, $CC_1 = 6,5$, найдите угол между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$, параллельной плоскости ABC. Точка A_1 – проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \dfrac{6,5}{2} = \dfrac{13}{4}$,

$D_1F = \dfrac{10}{2} = 5$, $A_1F = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

$\operatorname{tg}\angle EFA_1 = \dfrac{A_1E}{A_1F} = \dfrac{13}{4 \cdot 13} = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x+1)^2} + \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-1)^2} \le \frac{(2x^2 + x + 5)^2}{2(x^2-1)^2}.$$

Решение.

Сделаем замену: $a = \dfrac{x-2}{x+1}$, $b = \dfrac{x+3}{x-1}$.

Тогда $a + b = \dfrac{(x-1)(x-2) + (x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2 + x + 5}{x^2 - 1}$.

Неравенство принимает вид: $a^2 + b^2 \le \dfrac{(a+b)^2}{2}$, откуда $a^2 + b^2 - 2ab \le 0$; $(a-b)^2 \le 0$.

Это неравенство верно тогда и только тогда, когда $a = b$. Получаем: $\dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{x+3}{x-1}$, откуда $x = -\dfrac{1}{7}$.

Замечание. Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к неравенству $\dfrac{(7x+1)^2}{\left(x^2-1\right)^2} \le 0$, откуда также получается ответ $x = -\dfrac{1}{7}$.

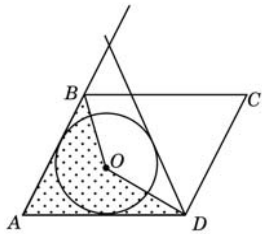
Ответ: $-\dfrac{1}{7}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	3
Ответ неверен из-за арифметической ошибки	2
Решение содержит верные преобразования, но в результате ошибочных рассуждений приобретены лишние решения, либо на последнем этапе решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

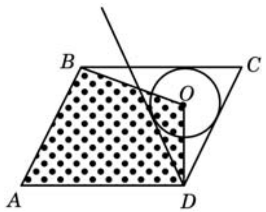
Окружностей две: каждая из них – вписанная в равносторонний треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 7 и 3 соответственно.



Для треугольника со стороной 7 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{6}.$$



Для треугольника со стороной 3 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{21\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{3}}{6}$, $8\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Балл
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Математика. 11 класс. Вариант 1

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	53,2
B2	14900
B3	9
B4	66
B5	6060
B6	6

№ задания	Ответ
B7	-0,6
B8	0,8
B9	128
B10	5
B11	3
B12	17

Математика. 11 класс. Вариант 2

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	59,2
B2	15000
B3	9
B4	64
B5	4800
B6	12

№ задания	Ответ
B7	-0,3
B8	1,5
B9	40
B10	7
B11	2
B12	14